

Musterlösungen zur Klausur

Robotik I: Einführung in die Robotik

am 12. Juli 2023

Name: Denavit	Vorname: Hartenberg	Matrikelnummer: $\frac{\pi}{2}$
-------------------------	-------------------------------	------------------------------------

Aufgabe 1	von 8 Punkten
Aufgabe 2	von 8 Punkten
Aufgabe 3	von 8 Punkten
Aufgabe 4	von 8 Punkten
Aufgabe 5	von 8 Punkten
Aufgabe 6	von 5 Punkten

Gesamtpunktzahl:	45 von 45 Punkten
-------------------------	-------------------

Note:	1,0
--------------	------------

Aufgabe 1 *Mathematik*

1. Winkel θ und Rotationsachse \mathbf{u} :

2 P.

$$\mathbf{q} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathbf{u} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = (-0.7, 0, 0.7, 0)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -0.7 \Rightarrow \frac{\theta}{2} \approx \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta \approx \frac{3\pi}{2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mathbf{u} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx \mathbf{u} \cdot 0.7 = (0, 0.7, 0) \Rightarrow \mathbf{u} = (0, 1, 0)$$

Es gibt vier äquivalente Lösungen (nur eine Lösung wird erwartet):

$$(1) \mathbf{u} = (0, 1, 0), \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$(2) \mathbf{u} = (0, -1, 0), \theta = -\frac{3\pi}{2}$$

$$(3) \mathbf{u} = (0, 1, 0), \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$(4) \mathbf{u} = (0, -1, 0), \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. Rotationsmatrix:

2 P.

Es wird um die y -Achse rotiert um den Winkel $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Die Rotationsmatrix kann aus den Einheitsrotationen hergeleitet werden wie folgt:

Es ist wichtig zu beachten, dass die Grundrotationsmatrix (eine Rotation um eine der Achsen eines Koordinatensystems) normalerweise als eine Rotation um die positive x -, y - und z -Achse definiert sind. Wenn Sie die Ergebnisse (2) und (4) in der vorherigen Frage erhalten, müssen Sie zuerst die Vorzeichen und den Vektor \mathbf{u} und θ umkehren und dann in die Gleichung der Grundrotationsmatrix einsetzen.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & 0 & \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Bedingungen:

2 P.

- $\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$
- $\det \mathbf{R} = 1$

Überprüfung der Rotationsmatrix aus Teilaufgabe 2.:

$$\bullet \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\bullet \det \mathbf{R} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Beide Bedingungen sind erfüllt, daher ist \mathbf{R} eine gültige Rotationsmatrix.

Überprüfung der gegebenen Rotationsmatrix bei keiner Antwort auf Teilaufgabe 2.:

$$\bullet \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{I}$$

$$\bullet \det \mathbf{R} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \neq 1$$

Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, ist \mathbf{R} **keine** gültige Rotationsmatrix.

4. SLERP (Vorteil und Probleme):

1 P.

- Vorteil: Konstante Winkelgeschwindigkeit bei der Interpolation
- Probleme: Orientierungen in $SO(3)$ werden durch Einheitsquaternionen doppelt abgedeckt. SLERP berechnet deshalb nicht immer die kürzeste Rotation.

5. Eulerwinkel and Quaternion:

1 P.

Nein, denn die Darstellung mittels Eulerwinkeln ist nicht kontinuierlich bzgl. Rotationen, daher liefert Interpolation keine glatten Trajektorien im Orientierungsraum.

Aufgabe 2 Kinematik

1. Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1 P.

2. Begründung:

Verallgemeinerung der inversen Matrix auf singuläre und nicht quadratische Matrizen. Hier $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

1 P.

3. Formel:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}$$

1 P.

4. Pseudoinverse:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^+(\boldsymbol{\theta}^*) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 P.

5. Gelenkwinkelgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{J}^+(\boldsymbol{\theta}^*) \cdot \dot{\mathbf{p}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 P.

6. Problem und Lösungsansatz:

Die Pseudoinverse ist in der Nähe von Singularitäten instabil. Lösungsansatz: Damped least squares oder Levenberg-Marquardt Minimierung

1 P.

7. Antwort und Begründung:

Nein. Beispielbegründung: Wie aus dem Rechenweg für Aufgabenteil 4 zu erkennen ist, sind die Eigenwerte der Manipulierbarkeit 2 und 4, und damit befindet sich die Konfiguration nicht nahe der Singularität. 1 P.

Aufgabe 3 *Bewegungsplanung*

1. Der Roboter bewegt sich unter dem Einfluss von Kräften, welche ein Potentialfeld auf ihn ausübt. Die Kräfte sind definiert durch $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = -\nabla U(\mathbf{p})$ und somit ist die Kraft der negative Gradient des Potentialfelds in diesem Punkt. 1 P.

2. Wahl U_1 und U_2 : 2 P.

- U_1

$$U_1 = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|$$

→ Anziehendes Potential. Geeignet für Ziel \mathbf{p}_g .

- U_2

$$U_2 = \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|}$$

→ Abstoßendes Potential. Geeignet für Hindernisse \mathbf{p}_{o_1} und \mathbf{p}_{o_2} .

3. Kraft in Punkt $\mathbf{p}_s = (3, 2)^\top$: 3.5 P.

- Aus dem Hinweis ergeben sich folgende Kräfte für U_1 und U_2 :

$$F_{U_1}(\mathbf{p}) = -\nabla U_1(\mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|}$$

$$F_{U_2}(\mathbf{p}) = -\nabla U_2(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_i}{(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|)^3}$$

- Damit lassen sich die Teilkräfte bestimmen:

$$\begin{aligned} F_g(\mathbf{p}) &= -\nabla U_g(\mathbf{p}) \\ &= -\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_g}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_g\|} \\ &= -\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_g}{2} \\ &= -\frac{(3, 2)^\top - (5, 2)^\top}{2} \\ &= (1, 0)^\top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{o_1}(\mathbf{p}) &= -\nabla U_{o_1}(\mathbf{p}) \\ &= \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_{o_1}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{o_1}\|^3} \\ &= \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_{o_1}}{1} \\ &= (3, 2)^\top - (4, 2)^\top \\ &= (-1, 0)^\top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{o_2}(\mathbf{p}) &= -\nabla U_{o_2}(\mathbf{p}) \\
 &= \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_{o_2}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{o_2}\|^3} \\
 &= \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_{o_2}}{2^3} \\
 &= \frac{(3, 2)^\top - (3, 4)^\top}{8} \\
 &= \left(0, -\frac{1}{4}\right)^\top
 \end{aligned}$$

- Die Gesamtkraft: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{o_1} + \mathbf{F}_{o_2} = \left(0, -\frac{1}{4}\right)^\top$

Falls in Teilaufgabe 2. U_1 und U_2 falsch zugeordnet werden, ergeben sich die folgenden Ergebnisse (Folgefehler):

$$\begin{aligned}
 F_g(\mathbf{p}) &= \left(\frac{1}{4}, 0\right)^\top \\
 F_{o_1}(\mathbf{p}) &= (1, 0)^\top \\
 F_{o_2}(\mathbf{p}) &= (0, 1)^\top \\
 \mathbf{F} &= \left(\frac{5}{4}, 1\right)^\top
 \end{aligned}$$

4. Problem bei Potentialfeldmethode:

1.5 P.

Durch Summation von anziehenden Potentialen U_{an} und abstoßenden Potentialen U_{ab} kann das resultierende Potentialfeld U **lokale Minima** besitzen. Wenn der Roboter sich in Richtung des negativen Gradienten des Potentialfeldes bewegt, kann er in einem solchen lokalen Minimum „steckenbleiben“.

Maßnahmen: (eine genügt)

- Anziehende Potentiale U_{an} und abstoßende Potentiale U_{ab} so definieren, dass U kein lokales Minimum hat, außer im Ziel \mathbf{p}_g .
- Im Suchalgorithmus Techniken zur „Flucht“ aus lokalen Minima anwenden

Aufgabe 4 Greifen

1. Annahme:

1 P.

Der Griff kann beliebigen externen Wrenches widerstehen unter der Annahme, dass beliebig große Kräfte an den Kontakten erzeugt werden können.

2. Griff:

(a) Wrenches:

2 P.

Mit Reibung \implies GWS von C_1 wird von 2 Wrenches $\mathbf{w}_{1,1}, \mathbf{w}_{1,2}$ aufgespannt.

Reibungskoeffizient $\mu = 1 \implies$ Öffnung der Reibungskegel = 45°

$$\implies \text{Kräfte } \mathbf{f}_{1,1} = (1, 1)^\top, \quad \mathbf{f}_{1,2} = (1, -1)^\top \quad (\text{siehe Abbildung 1})$$

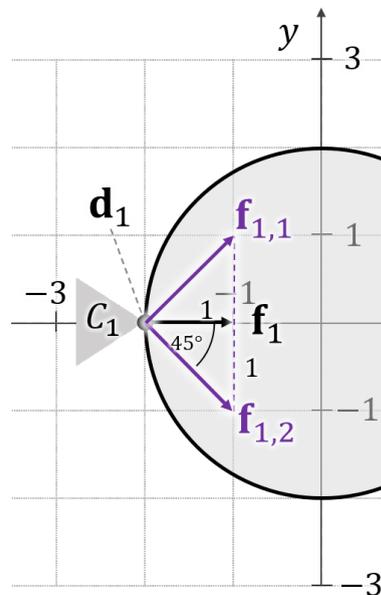


Abbildung 1: Reibungsdreieck von Griff G

Damit ergeben sich die Drehmomente $\tau_{1,1}, \tau_{1,2}$ zu:

$$\tau_{1,1} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{f}_{1,1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = -2$$

$$\tau_{1,2} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{f}_{1,2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = 2$$

$$\implies \mathbf{w}_{1,1} = (1, 1, -2)^\top, \quad \mathbf{w}_{1,2} = (1, -1, 2)^\top$$

(b) Antwort und Begründung:

1 P.

Ja der Griff ist kraftgeschlossen, , denn die vier Wrenches $\mathbf{w}_{1,1}, \mathbf{w}_{1,2}, \mathbf{w}_{2,1}, \mathbf{w}_{2,2}$ spannen zusammen den \mathbb{R}^3 positiv auf , bzw. es gibt eine Kugel am Ursprung des Grasp-Wrench-Space (GWS) mit Radius > 0 , die vollständig im GWS ist,

(c) Antwort und Begründung:

2 P.

Das kreisförmige Objekt kann ohne Reibung mit keiner Anzahl von Kontakten formgeschlossen gegriffen werden. Begründung: Ohne Reibung wirken nur Normalkräfte an den Kontakten, aber keine Tangentialkräfte. Beim Kreis zeigen alle Normalen genau zum Mittelpunkt (Schwerpunkt). Daher kann keine Normalkraft ein Drehmoment auf das Objekt erzeugen. Es wird also nie beliebigen externen Drehmomenten widerstanden werden können (der Kreis kann sich immer innerhalb der Kontakte drehen).

3. Information:

(a) vollständiges 3D Modell / Geometrie, Objektklasse

1 P.

(b) unvollständige Geometrie / Sensordaten (z.B. Punktwolken, Farb-/Tiefenbilder)

1 P.

Aufgabe 5 Bildverarbeitung

1. Bildrepräsentation:

(a) Speicherbedarf in MB:

$$1000 \cdot 800 \cdot 3 \text{ B} = 2\,400\,000 \text{ B} = 2.4 \text{ MB}$$

1 P.

(b) Ausreichend:

Nein, denn USB 2.0 kann maximal $60 \frac{\text{MB}}{\text{s}}$ übertragen und für 30 Bilder pro Sekunde von der Kamera werden $72 \frac{\text{MB}}{\text{s}}$ benötigt.

1 P.

2. Lochkameramodell

(a) Bildkoordinaten:

Formel:

$$\begin{pmatrix} u \cdot w \\ v \cdot w \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Werte einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 50 \\ 0 & 50 & 200 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot 50 + 0 \cdot 200 + 50 \cdot 100 \\ 0 \cdot 50 + 50 \cdot 200 + 200 \cdot 100 \\ 0 \cdot 50 + 0 \cdot 200 + 1 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 30\,000 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

1 P.

(b) Kamerakalibrierung:

Es werden mindestens 6 Korrespondenzen benötigt. Für die Kalibrierung wird oft ein Schachbrettmuster verwendet.

2 P.

3. Padding-Verfahren:

- Konstanter Wert: Bild wird an den Rändern auf einen konstanten Wert (z.B. 0) gesetzt.
- Umschlingen: Bild wird „fortgesetzt“ mit Werten der gegenüberliegenden Seite
- Spiegeln: Bild wird an den Rändern gespiegelt
- Wiederholen: Nehme letzten Wert

2 P.

4. Kantenverfolgung mit Hysterese:

Es werden die 8 Nachbarpixel von jedem schwachen Kantenpixel betrachtet. Befindet sich ein starkes Kantenpixel in der Nachbarschaft, handelt es sich um ein Kantenpixel, andernfalls nicht.

1 P.

Aufgabe 6 *Roboterprogrammierung*

1. Merkmale: (siehe Kapitel 10, Folie 36)

2 P.

- Hierarchisch
- Interlevel-Transitionen
- Orthogonalität
- Zustandsaktionsphasen

2. Grund: (einer genügt) (siehe Kapitel 10, Folie 54)

1 P.

- Mächtiger Mechanismus zur Komplexitätsreduktion des Suchraums während des Lernens (im Gegensatz zum Ausprobieren aller Möglichkeiten).
- Impliziter Mechanismus zum Trainieren von Robotern, der das explizite und mühsame händische Programmieren reduziert oder sogar ganz eliminiert.
- Verständnis der Kopplung und Lernen relevanter Beziehungen zwischen Perzeption und Aktion.

3. Benennung und Erklärung: (siehe Kapitel 10, Folie 91)

2 P.

- Semantische Segmentierung : basierend auf Kontaktrelationen zwischen Objekten
- Bewegungssegmentierung : basierend auf Charakteristiken von Trajektorien (Bewegungsdynamik, Beschleunigungsprofil)